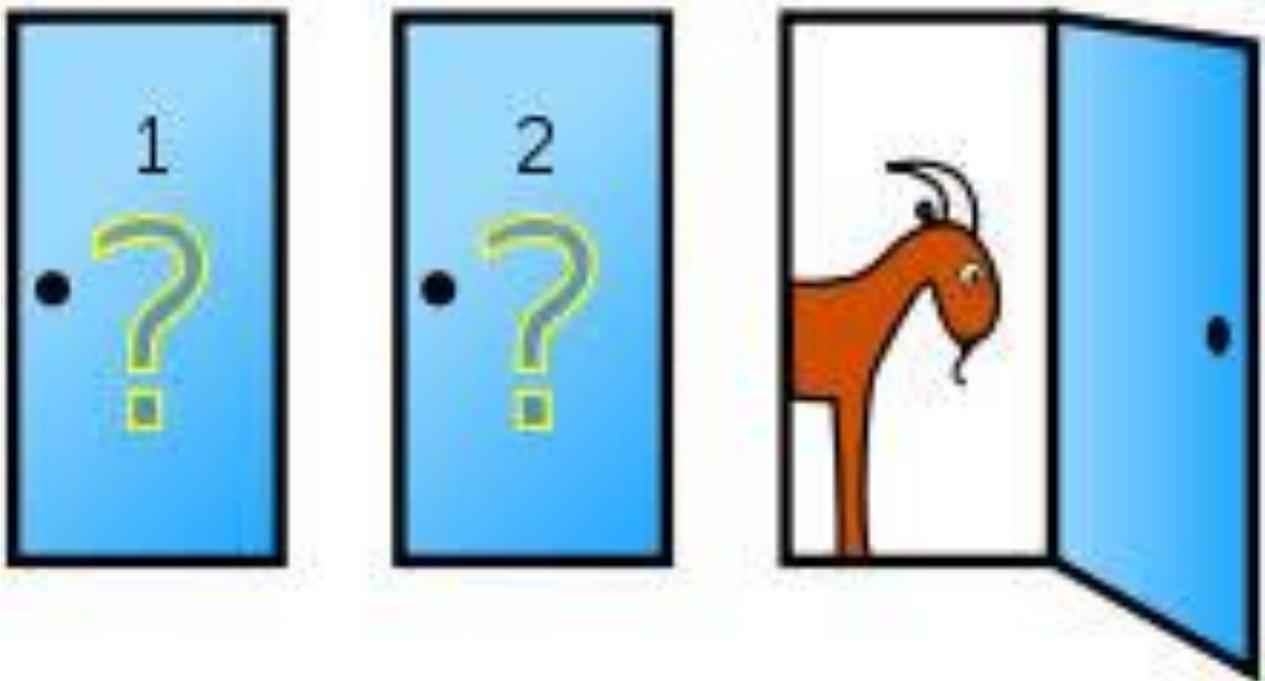


# 隔「三」打「羊」

## － 探討蒙提霍爾問題之延伸問題



研究領域：數學與資訊類

指導老師：徐意婷 老師

研究者：于濬暢 撰

中華民國一百一十三年四月

## 摘要

在一次看書時，發現書中的蒙提霍爾問題，講述問題的最佳解答，但此問題中的解答違反直覺，這讓我感到興趣。查閱資料後，發現還有其他的各種延伸問題，於是我想要計算各種延伸問題，並 Scratch 結合，製作機率計算程式。

我將先計算總門數不變，開門的各種機率；再計算總門數 3~8 門，開門數不變的各種機率，接著找出各種機率是否有無規律，最後找出可以套用各個組合的公式。

經過程式計算後，發現不換門時，三門得到車機率最高；換門時，十門開八門機率最高。規律的部分，發現不換門，總門數相同時，不論開多少門，機率不變；換門時，設最大開門數得到車的機率為  $x$ ，最大開門數-1 的得到車的機率即為  $\frac{1}{2}x$ ，最大開門數-2 得到車的機率即為  $\frac{1}{3}x$ ，以此類推。

關鍵詞：蒙提霍爾問題、機率

# 目錄

摘要.....	2
壹、前言.....	3
一、研究動機.....	3
二、研究目的.....	3
三、文獻探討.....	3
貳、研究設備及器材.....	4
參、研究過程或方法.....	4
一、蒙提霍爾問題理論計算方法.....	4
二、證明文獻中的公式正確性.....	5
三、蒙提霍爾問題轉為 Scratch 程式.....	5
四、研究方法.....	8
肆、研究結果.....	9
一、探討固定一扇門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異..	9
二、探討 $x$ 為 3 到 10 時，開啟相同數量的門，換與不換門得到車的機率.....	13
三、各種組合比較.....	14
伍、討論.....	16
一、各種組合機率是否有規律性?適合玩家還是主持人?.....	16
二、機率結果是否有套用的公式?.....	16
三、探索各種組合情況下的機率規律性，以發現可能存在的模式和關聯.....	16
陸、結論.....	17
一、固定一扇門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異.....	17
二、探討開啟相同數量的門，換與不換門得到車的機率之間的比較.....	18
三、探索各種組合情況下的機率規律性，以發現可能存在的模式和關聯.....	19
柒、參考文獻資料.....	20
捌、研究心得.....	21
玖、研究日誌.....	22

## 圖表目錄

表 1-1 蒙提霍爾問題歷屆相關作品 .....	4
表 3-1 理論計算得到車的機率 .....	4
表 3-2 三門測試的程式碼 .....	5
表 3-3 不同開門數的程式碼 .....	6
表 3-4 開五門程式碼 .....	6
表 3-5 程式介面說明 .....	7
表 4-1 開一門換和不換得到車的機率 .....	9
表 4-2 四門開一、二門換和不換得到車的機率 .....	9
表 4-3 五門開一到三門換和不換得到車的機率 .....	10
表 4-4 六門開一到四門換和不換得到車的機率 .....	10
表 4-5 七門開一到五門換和不換得到車的機率 .....	11
表 4-6 八門開一到六門換和不換得到車的機率 .....	11
表 4-7 九門開一到七門換和不換得到車的機率 .....	12
表 4-8 十門開一到八門換和不換得到車的機率 .....	12
表 4-9 $x$ 為 3 到 10，換門得到車的機率表 .....	13
表 4-10 $x$ 為 3 到 10，不換門得到車的機率表 .....	13
表 4-11 開相同數量的門，換與不換門得到車的機率 .....	14
表 4-12 當 $x$ 固定，開不同數量的門，換與不換門得到車的機率 .....	15
表 5-1 規律表 .....	16
表 6-1 三門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-2 四門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-3 五門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-4 六門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-5 七門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-6 八門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-7 九門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-8 十門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	17
表 6-9 開一門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-10 開二門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-11 開三門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-12 開四門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-13 開五門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-14 開六門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-15 開七門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18
表 6-16 開八門，換與不換門得到車的機率之間的差異 .....	18

# 壹、前言

## 一、研究動機

有一次我在閱讀時，看到蒙提霍爾問題，對於這個問題我完全陌生，經過我一番查閱資料後，我驚訝地發現，這個問題所帶來的答案與直覺相反耶！真的很令人深思。而這激發了我對這個問題的深深興趣，我尋找相關的解釋和資料，思考著如果問題的設置不同，是否會有截然不同的結果呢？

同時，身為一個熱愛利用 Scratch 設計小遊戲的人，我迫切想將蒙提霍爾問題融入我的程式設計中，我計劃先用理論去計算，再搭配蒐集到的文獻資料進行雙重驗證，以確保我的設計符合蒙提霍爾問題的本質。這個研究動機讓我充滿熱情，我期待著透過這個過程，深入了解問題的本質，也能提升自己的程式設計能力。

## 二、研究目的

- (一) 探究蒙提霍爾問題及其相關研究文獻。
- (二) 探討固定一扇門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異。
- (三) 探討開啟相同數量的門，換與不換門得到車的機率之間的比較。
- (四) 探索各種組合情況下的機率規律性，以發現可能存在的模式和關聯。
- (五) 根據研究結果，提出可以應用的機率公式，以便更廣泛地應用於類似問題或情境中。

## 三、文獻探討

### (一) 蒙提霍爾問題

1. 玩家在三扇門中挑選一扇門，他並不知道裡面是羊還是車。
2. 但主持人知道每扇門後面是羊還是車。
3. 主持人開啓剩下兩扇門的其中一扇門，並必須提供換門的機會。
4. 主持人都會挑一扇有羊的門打開。
5. 如果玩家在初始挑了一扇有羊的門，主持人必須挑另一扇有羊的門。
6. 如果玩家挑了一扇有車的門，主持人隨機在另外兩扇門中挑一扇有羊的門。
7. 玩家會被主持人詢問是否保持他原來的選擇，還是轉而選擇剩下的那一道門。
8. 玩家選擇換門或不換門，是否會影響選到車的機率。

## (二)歷屆相關作品

表 1-1 蒙提霍爾問題歷屆相關作品

作品來源	作品名稱	研究大綱	研究結論
金門地區第 56 屆中小學科學展覽會	Let' s make a deal-你換還是不換？	比較三、四、五門問題換和不換的機率的不同	換門中獎的機率，比不換門來得大

這份研究讓我了解了三、四、五門問題的各種機率，也讓我對六、七、八...門產生想算出來的興趣，而我又靈光一閃，在六、七、八...門得到車的機率會不會有甚麼規律，還有開不同數量的門是否對機率有影響。不過這份研究只有探討開一門的實驗，那我就更加好奇，如果開的門數變多是否會有影響，因此在研究開始之前我有先去驗證文獻公式的正確性。

### 貳、研究設備及器材

Scratch 程式、筆、紙、計算機

### 參、研究過程或方法

#### 一、蒙提霍爾問題理論計算方法

從文獻中，可得知  $\frac{\text{車子數量}}{\text{總門數}} \times \frac{\text{總門數}-1}{\text{最後剩下選擇門數}}$ ，因此接續的程式設計後測試結果將由此公式

進行計算驗證是否正確。

表 3-1 以上列公式來進行計算，以下只呈現不論總門數多少皆只開一門得到車的機率，並觀察計算結果和古典機率的誤差，證明程式無誤。

表 3-1 理論計算得到車的機率

總門數	是否換門	初始選門	得到車機率	總門數	是否換門	初始選門	得到車機率
三門	換	車	0	七門	換	車	0
		羊	100			羊	20
	不換	車	100		不換	車	100
		羊	0			羊	0
四門	換	車	0	八門	換	車	0
		羊	50			羊	16.67
	不換	車	100		不換	車	100
		羊	0			羊	0
五門	換	車	0	九門	換	車	0
		羊	33.33			羊	14.28
	不換	車	100		不換	車	100
		羊	0			羊	0
六門	換	車	0	十門	換	車	0
		羊	25			羊	12.5
	不換	車	100		不換	車	100
		羊	0			羊	0

## 二、證明文獻中的公式正確性

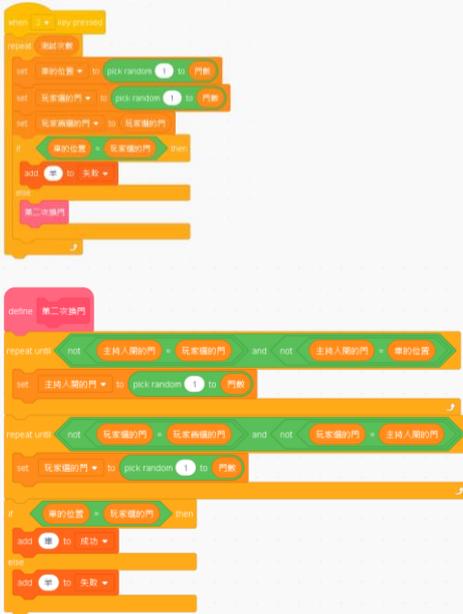
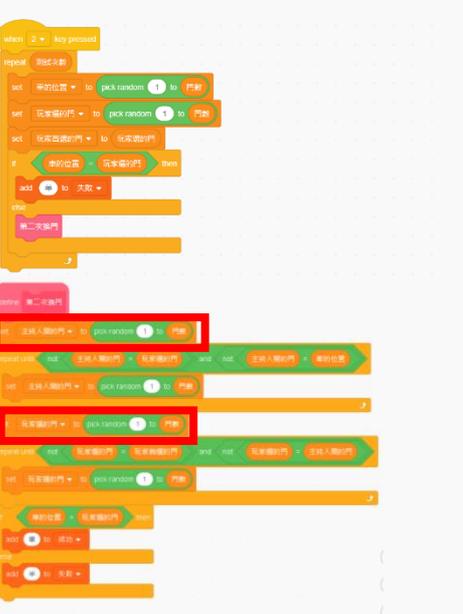
文獻中的公式  $\frac{\text{車子數量}}{\text{總門數}} \times \frac{\text{總門數}-1}{\text{最後剩下選擇門數}}$  可看出車子數量即為 1，總門數-1 即為羊的數量，之後再用 Scratch 計算機率，看機率是否可以套用在此公式上，發現機率吻合，又發現將兩個分子調換後(交換率)，就可以了解它公式的意思：「先選到羊」，再到剩下的門選到車。機率的吻合和公式概念正確，足以證明程式正確。接下來的計算將會繼續使用此公式進行計算古典機率。

## 三、蒙提霍爾問題轉為 Scratch 程式

### (一) 前導測試-開一門

為了測試程式是否有無問題，本研究將會從開一門的程式開始製作、測試，並找出程式錯誤。

表 3-2 三門測試的程式碼

向度 開門數	原本設計的程式碼	修改後的程式碼
開一門		

可以看出，原本的程式和修改後的程式在第二段程式有所不同，因為程式執行時，主持人開的門將會為 0，影響實驗結果。因此修改過後，在主持人開的門和玩家換門前增加隨機取數的功能，使主持人開的門不會為 0。

### (二) 開門數量不同的程式

為了方便計算結果，本實驗將會使用開門數的程式進行設計，讓各種總門數都可共用一種程式。若使用總門數進行設計，會發現開各個門程式內容都不相同，設計難度將大幅增加。

表 3-3 不同開門數的程式碼



上述表格中的程式，是各個開門程式主要改的位置，可以看出總門數每增加一個就會依序增加一個「玩家選的門不會等於主持人開的門」，這個設定是為了讓玩家不會選到主持人開的門，而之後開 6~10 門程式，也是依此類推。

(三) 正式程式碼介紹(以開五門為範例)

表 3-4 開五門程式碼

第一部分	說明	第二部分	說明
	<p>此程式為重製計算，用於計算完之後的重製</p>		<p>此程式是第一部分的快捷鍵是為了更加方便的重製數據</p>

第三部分	說明	第四部分	說明
	此為不換門程式，按下 1 鍵即可計算		此為換門程式，按下 2 鍵即可計算，之後再和第五部分連結。
第五部分			說明
			此為換門程式的第二部分，負責執行主持人開門和玩家選門。

(四) 設計程式介面說明(以開五門為範例)

表 3-5 程式介面說明

介面圖	說明
	<p><b>總門數</b> 可左右移動，設定總門數</p> <p><b>失敗得到羊</b> 10 萬次中失敗的次數</p> <p><b>成功得到車</b> 10 萬次中成功的次數</p> <p>按鍵盤 1 啟用不換門程式</p> <p>按鍵盤 2 啟用換門程式</p>

此程式需先將門數調整好，再按下 1 或 2 鍵，即可呈現成功得到車的次數，機率的計算為成功次數除以總次數乘以 100%，也就是  $12762/100000*100\%=12.762\%$ 。

## 四、研究方法

### (一) 資料蒐集法

網路上搜尋蒙提霍爾問題的相關研究、資料，並在閱讀後進行整理、分析。

### (二) 製作 scratch 程式

1. 依序製作程式，用於不同開門情形。
2. 將程式試跑結果和文獻比對。

### (三) 整理數據

1. 使用表格進行整理數據。
2. 使用折線圖進行比較結果。

### (四) 找出最高和最低的機率

找出得到車子最高和最低機率的組合，以利於玩家和主持人。

## 肆、研究結果

### 一、探討固定一扇門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

本研究將設  $x$  為總門數，而最大開門數為  $x-2$ ，這遊戲才能順利進行。  
 (舉例：總門數為 5 門，則最多開 3 門，其次是 2 門、1 門)  
 此處表格的計算次數是指實驗的次數，本研究將會把五次計算的機率進行平均。

#### (一) 當 $x=3$ ，開 1 門

表 4-1 開一門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算次數	換到車的機率(%)	平均(%)
換	一	66.539	66.54
	二	66.661	
	三	66.542	
	四	66.499	
	五	66.468	
不換	一	33.427	33.27
	二	33.089	
	三	33.162	
	四	33.489	
	五	33.213	

根據表 4-1，發現以下幾點：

當  $x=3$  時，換門的平均機率約為 66.54%，而不換門的機率約為 33.27%，明顯換門得到車的機率比較高。

#### (二) 當 $x=4$ ，開 1、2 門

表 4-2 四門開一、二門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算次數	換到車的機率(%)	
		開一門	開二門
換	一	37.671	74.944
	二	37.732	74.836
	三	37.748	75.036
	四	37.481	75.083
	五	37.727	74.937
	平均	37.67	74.97
不換	一	24.989	25.086
	二	25.121	25.218
	三	24.932	24.974
	四	24.994	24.813
	五	24.963	24.918
	平均	24.99	25.00

根據表 4-2，發現以下幾點：

1. 當  $x=4$  時，不論主持人是開一門還是開兩門，在玩家不換門的情況下，平均機率相差不多，截至小數點第三位皆相同。
2. 當  $x=4$  時，主持人開兩門，玩家換門得到車的機率比不換門高將近三倍。

(三) 當  $x=5$ ，開 1、2、3 門

表 4-3 五門開一到三門換和不換得到車的機率

是否換門 \ 向度	計算次數	換到車的機率(%)		
		開一門	開二門	開三門
換	一	26.617	39.858	79.801
	二	26.787	40.369	79.916
	三	26.634	40.127	80.049
	四	26.677	40.028	80.072
	五	26.929	40.047	79.872
	平均	<b>26.73</b>	<b>40.09</b>	<b>79.94</b>
不換	一	20.192	19.962	19.813
	二	20.045	19.954	19.945
	三	20.142	19.991	19.897
	四	19.867	20.282	19.940
	五	19.808	20.053	19.959
	平均	<b>20.01</b>	<b>20.05</b>	<b>19.91</b>

根據表 4-3，發現以下幾點：

1. 當  $x=5$ ，玩家選擇換門，開三門得到車的機率最高，其次依序開兩門、開一門。
2. 當  $x=5$ ，玩家選擇換門，開三門得到車的機率幾乎是開兩門的兩倍。
3. 當  $x=5$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不多。

(四) 當  $x=6$ ，開 1、2、3、4 門

表 4-4 六門開一到四門換和不換得到車的機率

是否換門 \ 向度	計算次數	換到車的機率(%)			
		開一門	開二門	開三門	開四門
換	一	20.639	27.786	41.711	83.231
	二	20.904	27.736	41.493	83.229
	三	20.735	27.535	41.637	83.278
	四	20.843	27.636	41.632	83.080
	五	20.998	27.955	41.490	83.418
	平均	<b>20.82</b>	<b>27.73</b>	<b>41.59</b>	<b>83.25</b>
不換	一	16.825	16.573	16.740	16.621
	二	16.650	16.546	16.566	16.640
	三	16.543	16.700	16.518	16.611
	四	16.788	16.795	16.530	16.723
	五	16.864	16.704	16.715	16.705

	平均	16.73	16.66	16.61	16.66
--	----	-------	-------	-------	-------

根據表 4-4，發現以下幾點：

1. 當  $x=6$ ，玩家選擇換門，開四門得到車的機率最高，其次依序開三門、開二門、開一門。
2. 當  $x=6$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不大。

(五) 當  $x=7$ ，開 1、2、3、4、5 門

表 4-5 七門開一到五門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算次數	換到車的機率(%)				
		開一門	開二門	開三門	開四門	開五門
換	一	17.044	21.330	28.843	42.914	85.719
	二	17.162	21.440	28.582	42.654	85.589
	三	17.057	21.552	28.532	42.778	85.650
	四	17.098	21.567	28.311	42.953	85.539
	五	17.141	21.521	28.793	43.251	85.690
	平均	<b>17.10</b>	<b>21.48</b>	<b>28.61</b>	<b>42.91</b>	<b>85.64</b>
不換	一	14.196	14.322	14.151	14.318	14.453
	二	14.198	14.393	14.328	14.235	14.393
	三	14.194	14.254	14.060	14.462	14.418
	四	14.341	14.181	14.372	14.482	14.402
	五	14.251	14.394	14.103	14.245	14.321
	平均	<b>14.24</b>	<b>14.31</b>	<b>14.20</b>	<b>14.35</b>	<b>14.40</b>

根據表 4-5，發現以下幾點：

1. 當  $x=7$ ，玩家選擇換門，開五門得到車的機率最高，其次依序開四門、開三門、開二門、開一門。
2. 當  $x=7$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不大。

(六) 當  $x=8$ ，開 1、2、3、4、5、6 門

表 4-6 八門開一到六門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算 次數	換到車的機率(%)					
		開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門
換	一	14.656	17.580	22.003	28.867	43.691	87.561
	二	14.650	17.631	21.834	29.159	43.890	87.580
	三	14.611	17.398	21.572	28.979	44.076	87.574
	四	14.689	17.466	21.874	29.217	43.877	87.361
	五	14.745	17.548	21.950	29.174	43.647	87.478
	平均	<b>14.67</b>	<b>17.52</b>	<b>21.85</b>	<b>29.08</b>	<b>43.84</b>	<b>87.51</b>
不換	一	12.622	12.633	12.416	12.470	12.691	12.689
	二	12.449	12.425	12.528	12.272	12.536	12.390
	三	12.607	12.493	12.557	12.588	12.514	12.565
	四	12.486	12.404	12.532	12.532	12.526	12.546
	五	12.628	12.402	12.501	12.480	12.409	12.529

	平均	12.56	12.47	12.51	12.47	12.54	12.54
--	----	-------	-------	-------	-------	-------	-------

根據表 4-6，發現以下幾點：

1. 當  $x=8$ ，玩家選擇換門，開六門得到車的機率最高，其次依序開五門、開四門、開三門、開二門、開一門。
2. 當  $x=8$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不大。

(七) 當  $x=9$ ，開 1、2、3、4、5、6、7 門

表 4-7 九門開一到七門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算 次數	換到車的機率(%)						
		開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門	開七門
換	一	12.676	14.942	17.768	22.288	29.525	44.225	89.043
	二	12.533	14.912	17.933	22.278	29.565	44.362	88.655
	三	12.724	14.805	17.713	22.255	29.613	44.547	88.929
	四	12.500	14.781	17.819	22.157	29.849	44.617	88.890
	五	12.649	14.787	17.664	22.166	29.659	44.579	89.021
	平均	<b>12.62</b>	<b>14.85</b>	<b>17.78</b>	<b>22.23</b>	<b>29.64</b>	<b>44.47</b>	<b>88.91</b>
不換	一	11.145	11.115	11.154	11.023	11.180	10.817	11.287
	二	10.979	11.141	11.083	11.021	10.981	10.946	11.066
	三	11.092	11.205	11.084	11.033	11.151	11.026	11.005
	四	11.196	11.039	11.018	10.922	11.176	11.030	11.081
	五	11.107	11.100	11.184	11.064	10.939	11.028	11.098
	平均	<b>11.10</b>	<b>11.12</b>	<b>11.10</b>	<b>11.01</b>	<b>11.09</b>	<b>10.97</b>	<b>11.11</b>

根據表 4-7，發現以下幾點：

1. 當  $x=9$ ，玩家選擇換門，開七門得到車的機率最高，其次依序開六門、開五門、開四門、開三門、開二門、開一門。
2. 當  $x=9$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不大。

(八) 當  $x=10$ ，開 1、2、3、4、5、6、7、8 門

表 4-8 十門開一到八門換和不換得到車的機率

向度 是否換門	計算 次數	換到車的機率(%)							
		開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門	開七門	開八門
換	一	11.365	12.964	14.888	17.865	22.518	30.202	44.976	89.808
	二	11.147	12.864	15.109	17.965	22.516	30.088	44.979	90.034
	三	11.249	12.879	14.889	18.143	22.636	29.901	44.985	89.826
	四	11.326	12.842	14.996	18.075	22.692	30.225	45.072	90.158
	五	11.292	12.799	15.153	18.020	22.449	29.768	45.091	89.926
	平均	<b>11.28</b>	<b>12.87</b>	<b>15.01</b>	<b>18.01</b>	<b>22.56</b>	<b>30.04</b>	<b>45.02</b>	<b>89.95</b>
不換	一	9.906	9.920	10.025	9.979	9.950	10.030	9.960	9.940
	二	10.117	9.878	9.947	9.842	10.063	10.007	9.915	9.987
	三	9.869	9.817	9.950	10.030	9.915	9.962	10.083	10.168
	四	9.942	9.942	10.045	10.071	9.940	9.933	9.964	9.889
	五	10.042	10.008	10.010	10.032	10.179	9.977	9.970	9.762

	平均	9.98	9.91	10.00	9.99	10.01	9.98	9.98	9.95
--	----	------	------	-------	------	-------	------	------	------

根據表 4-8，發現以下幾點：

1. 當  $x=10$ ，玩家選擇換門，開八門得到車的機率最高，其次依序開七門、開六門、開五門、開四門、開三門、開二門、開一門。
2. 當  $x=10$ ，只要玩家選擇不換門，不論是開幾門得到車的機率相差不大。

## 二、探討 $x$ 為 3 到 10 時，開啟相同數量的門，換與不換門得到車的機率

### (一) 換門得到車的機率

表 4-9  $x$  為 3 到 10，換門得到車的機率表

開門數 $x$	一	二	三	四	五	六	七	八
3	66.54							
4	37.67	74.97						
5	26.73	40.09	79.94					
6	20.82	27.73	41.59	83.25				
7	17.10	21.48	28.61	42.91	85.64			
8	14.67	17.52	21.85	29.08	43.84	87.51		
9	12.62	14.85	17.78	22.23	29.64	44.47	88.91	
10	11.28	12.87	15.01	18.01	22.56	30.04	45.02	89.95

### (二) 不換門得到車的機率

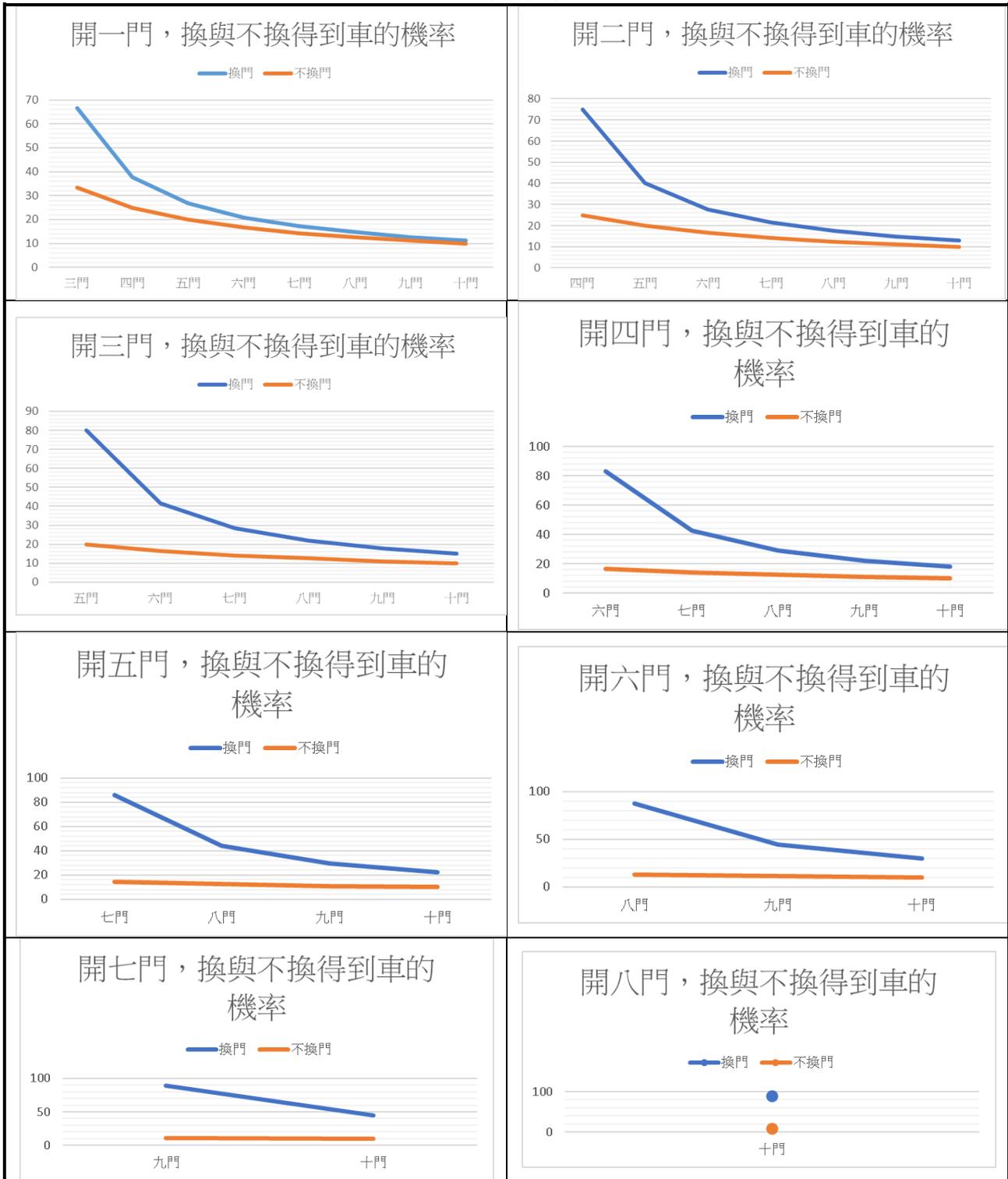
表 4-10  $x$  為 3 到 10，不換門得到車的機率表

開門數 $x$	一	二	三	四	五	六	七	八
3	33.27							
4	24.99	25.00						
5	20.01	20.05	19.91					
6	16.73	16.66	16.61	16.66				
7	14.24	14.31	14.20	14.35	14.40			
8	12.56	12.47	12.51	12.47	12.54	12.54		
9	11.10	11.12	11.10	11.01	11.09	10.97	11.11	
10	9.98	9.91	10.00	9.99	10.01	9.98	9.98	9.95

### 三、各種組合比較

#### (一)開相同數量的門

表 4-11 開相同數量的門，換與不換門得到車的機率



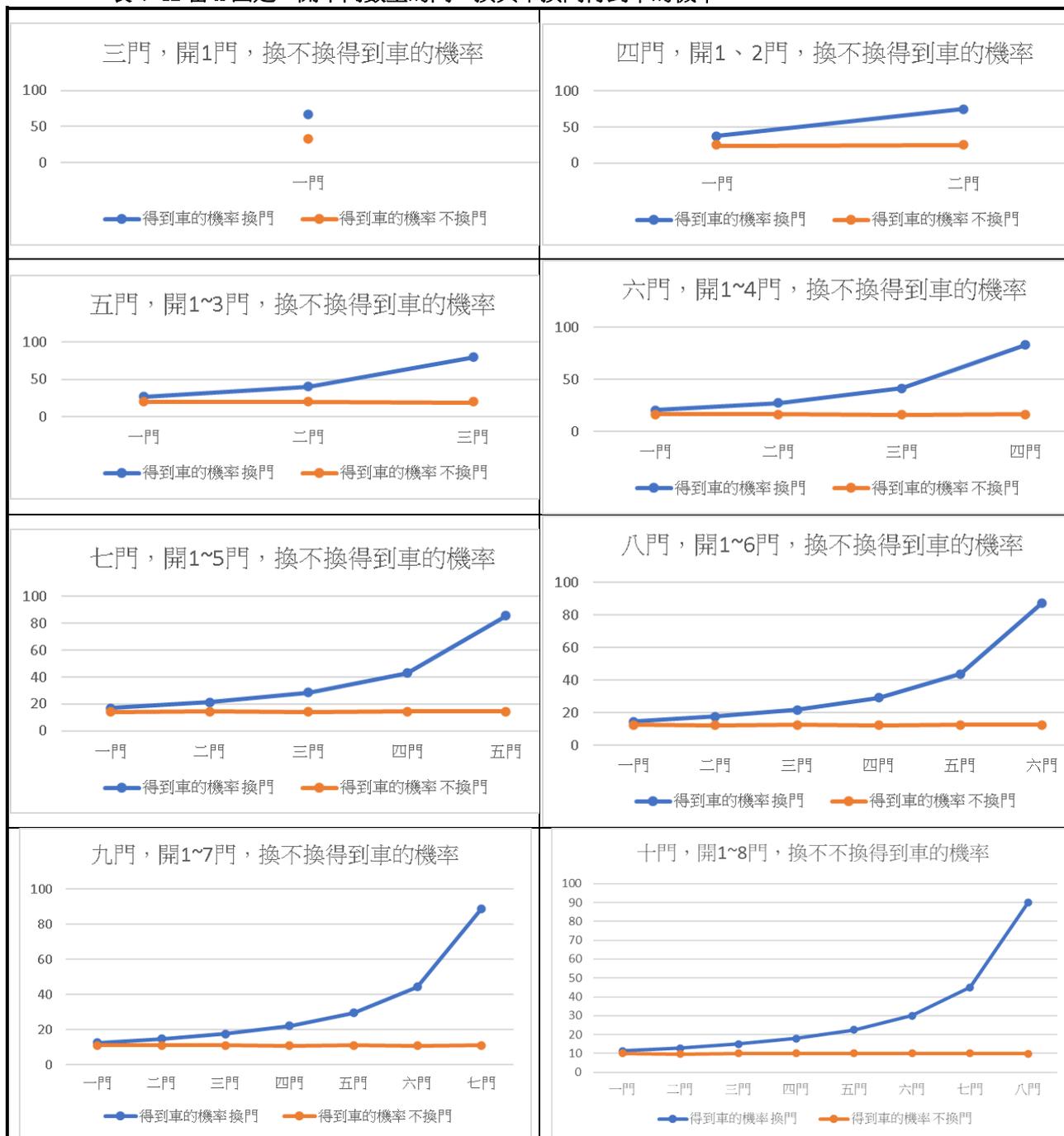
根據表 4-11，發現以下幾點：

1. 開相同數量的門，換門得到車的機率比不換門得到車的機率高。

2. 開相同數量的門，總門數越多，得到車的機率越低。
3. 開相同數量的門，總門數越少，得到車的機率越高。

## (二) 當 $x$ 固定，開不同數量的門

表 4-12 當  $x$  固定，開不同數量的門，換與不換門得到車的機率



根據表 4-12，發現以下幾點：

1. 總門數不論多少，換門得到車的機率比不換門的機率高。
2. 總門數不論多少，只要開門數越少，得到車的機率就越低。
3. 總門數不論多少，只要開門數越多，得到車的機率越高。

4. 總門數不論多少，只要不換門，得到車的機率都比較低。

## 伍、討論

### 一、各種組合機率是否有規律性?適合玩家還是主持人?

從結果中，發現在總門數相同的情況，開不同門數將會有倍數關係，設最大開門數換門得到車的機率為  $x$ ，最大開門數-1 換門得到車的機率即為  $\frac{1}{2}x$ ，最大開門數-2 換門得到車的機率即為  $\frac{1}{3}x$ 。由此可知，適合玩家的情況為十門開八門換門，若開門數鎖定在 1，三門開一門換門是最好的。而此解答也可適用於考卷的選擇題中，若有可以排除的選項，套用此問題解答，可以更好的猜題。

### 二、機率結果是否有套用的公式?

設計 Scratch 時，發現換門時，最終得到車的前提是一開始拿到羊，再來從剩下的門選到車，才算成功。由此可知，換門的公式即為羊的數量除以總門數除以(總門數減開門數減 1)，這裡的 1，是因為換門時，需要排除玩家選的門。

換門公式如下：

$$\frac{\text{羊的數量}}{\text{總門數}} / (\text{總門數} - \text{開門數} - 1)$$

而不換門程式則是直接從一開始所有的門選到車。不換門的公式即為車子數量除以總門數。

不換門公式如下：

$$\frac{\text{車的數量}}{\text{總門數}}$$

### 三、探索各種組合情況下的機率規律性，以發現可能存在的模式和關聯

我想知道機率之間是否存在的規律關係，像是倍數關係，是否可以讓算出開一門機率後，就能依據規律算出開其他門數的機率。觀察表 4-10 中的機率結果，可以發現開二到八門得到車的機率除以前一個機率時(例:四門開二門除以四門開一門)，得出的數字呈現規律性排列，因此，只需要開一門得到車的機率，就可以計算出之後所有機率的大概範圍，如下表：

表 5-1 規律表

開門數 X	一	二	三	四	五	六	七	八
3								
4		2.0						
5		1.5	2.0					
6		1.3	1.5	2.0				
7		1.3	1.3	1.5	2.0			
8		1.2	1.3	1.3	1.5	2.0		
9		1.2	1.2	1.3	1.3	1.5	2.0	
10		1.1	1.2	1.2	1.3	1.3	1.5	2.0

## 陸、結論

### 一、固定一扇門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

表 6-1 三門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)	
			開一門	
三門	換		66.54	
	不換		33.27	

表 6-2 四門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)	
			開一門	開二門
四門	換		37.67	74.97
	不換		24.99	25.00

表 6-3 五門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)		
			開一門	開二門	開三門
五門	換		26.73	40.09	79.94
	不換		20.01	20.05	19.91

表 6-4 六門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)			
			開一門	開二門	開三門	開四門
六門	換		20.82	27.73	41.59	83.25
	不換		16.73	16.66	16.61	16.66

表 6-5 七門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)				
			開一門	開二門	開三門	開四門	開五門
七門	換		14.24	14.31	14.20	14.35	14.40
	不換		14.24	14.31	14.20	14.35	14.40

表 6-6 八門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)					
			開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門
八門	換		14.67	17.52	21.85	29.08	43.84	87.51
	不換		12.56	12.47	12.51	12.47	12.54	12.54

表 6-7 九門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)						
			開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門	開七門
九門	換		12.62	14.85	17.78	22.23	29.64	44.47	88.91
	不換		11.10	11.12	11.10	11.01	11.09	10.97	11.11

表 6-8 十門，開啟不同數量的其他門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門		向度	換到車的機率(%)							
			開一門	開二門	開三門	開四門	開五門	開六門	開七門	開八門
十門	換		11.28	12.87	15.01	18.01	22.56	30.04	45.02	89.95
	不換		9.98	9.91	10.00	9.99	10.01	9.98	9.98	9.95

從表 6-1 到 6-8 中，可以發現：

1. 在換門情況下，十門開八門得到車機率最高；十門開一門機率最小。
2. 在不換門情況下，三門得到車機率最高；十門機率最小。
3. 不換門的情況下，x 相同，不論開多少門，機率變化不大。

## 二、 探討開啟相同數量的門，換與不換門得到車的機率之間的比較

表 6-9 開一門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)							
		三門	四門	五門	六門	七門	八門	九門	十門
開一門	換	66.54	37.67	26.73	20.82	17.10	14.67	12.62	11.28
	不換	33.27	24.99	20.01	16.73	14.24	12.56	11.10	9.98

表 6-10 開二門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)						
		四門	五門	六門	七門	八門	九門	十門
開二門	換	74.97	40.09	27.73	21.48	17.52	14.85	12.87
	不換	25.00	20.05	16.66	14.31	12.47	11.12	9.91

表 6-11 開三門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)					
		五門	六門	七門	八門	九門	十門
開三門	換	79.94	41.59	28.61	21.85	17.78	15.01
	不換	19.91	16.61	14.20	12.51	11.10	10.00

表 6-12 開四門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)				
		六門	七門	八門	九門	十門
開四門	換	83.25	42.91	29.08	22.23	18.01
	不換	16.66	14.35	12.47	11.01	9.99

表 6-13 開五門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)			
		七門	八門	九門	十門
開五門	換	85.64	43.84	29.64	22.56
	不換	14.40	12.54	11.09	10.01

表 6-14 開六門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)		
		八門	九門	十門
開六門	換	87.51	44.47	30.04
	不換	12.54	10.97	9.98

表 6-15 開七門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)	
		九門	十門
開七門	換	88.91	45.02
	不換	11.11	11.11

表 6-16 開八門，換與不換門得到車的機率之間的差異

是否換門 \ 向度		換到車的機率(%)
		十門
開八門	換	89.95

從表 6-9 到 6-16 中，可以發現：

1. 開越多門，換門得到車的機率越大。
2. 開越少門，換門得到車的機率越小。
3. 開越少門，換門和不換門得到車機率相差越少；反之，開越多門，換門和不換門得到車機率相差越多。

### 三、 探索各種組合情況下的機率規律性，以發現可能存在的模式和關聯

在總門數相同且換門時，將最大開門數得到車的機率設為  $x$ ，最大開門數-1 得到車的機率即為  $\frac{1}{2}x$ ，最大開門數-2 得到車的機率即為  $\frac{1}{3}x$ ，依此類推。因此開越少門得到車的機率將會越來越小。

## 柒、參考文獻資料

- Wikipedia. (2023 年 11 月 29 日). 蒙提霍爾問題. 取自 <https://reurl.cc/qr2qaD>
- 教育部金門縣政府教育處. (無日期). 金門地區第 56 屆中小學科學展覽會. 取自 [https://w3.khvs.tc.edu.tw/school/widget/main\\_menu/show.php?id=1802](https://w3.khvs.tc.edu.tw/school/widget/main_menu/show.php?id=1802)
- Pei, E. (2021 年 7 月 2 日). 蒙提霍爾問題模擬器. 取自 <https://peienwu.com/monty-hall/>
- 教育部金門縣政府教育處. (2014). 金門地區第 56 屆中小學科學展覽會成果研討會論文集. 取自 <https://science.km.edu.tw/storage/media/332/58d6a4c27dfa4.pdf>

## 捌、研究心得

在這次的研究中，我學習到了許多關於機率的種種知識，也對於 Scratch 有了更深入的了解。在研究途中，發現獨立研究不是想像中那麼簡單，設計程式時，會出現各種問題。在此，我也要感謝我的老師、家人和同學，幫助我想到研究主題、程式內容等種種內容。

雖然經歷了許多問題，但是研究途中還是非常有趣的，和同學的討論、程式完成的成就感，都是獨立研究有趣的一環。

## 玖、研究日誌

日期	事情
9/11	研究目的暫時完成
9/14	製作文獻探討
9/18	研究架構圖製作中
9/21	研究架構圖完成、研究流程圖製作中
9/23	完成研究流程圖 研究目的小改
9/25	製作 scratch
9/26	打 word
9/28	製作 scratch
10/2	製作 scratch
10/5	製作 scratch 成功
10/12	回歸 word
10/16	打 Word
10/17~11/15	CANVE 時間
11/23	弄表格
11/27	小弄表格、製作 Scratch
11/30	打 Word、製作 Scratch
12/7	製作 Scratch
12/11	發現 Scratch 程式和理想程式不同
12/14	設計 Scratch、表格
12/18	設計 Scratch、開一門程式完成 (開一門程式運氣好試出來)

12/21	設計 Scratch、開二門程式完成
12/25	開三門程式完成、開四門程式完成
12/28	開五、六、七、八門程式完成 小弄表格
1/11	找出 Scratch 現在對的程式 和之前錯誤的程式有何不同
1/15	一樣找出 Scratch 現在對的程式 和之前錯誤的程式有何不同 (這學期最後一禮拜) (BUG:主持人開的門會是 0) 表格設計完成(全部)
1/25	將 Scratch 結果填入表格
1/30	將 Scratch 結果填入表格 too
2/2	將 Scratch 結果填入表格 TOO2
2/7、2/8	將 Scratch 結果填入表格 TOO3(完成) (發現不管開多少門，不換的機率不變)
2/12	寫小結
2/13	寫小結 (發現換門開 X 門，機率有倍數關係)
2/17	跟同學發表 表格
2/19	Excel… 表格的發現
2/20	寫程式解說
2/21	表格!!
2/22	填上空白、討論、紅字
2/23	改紅字
2/24	結論
2/25	結論
2/26	思考如何證明文獻和自己的公式

2/27	順一下 Word
2/28	摘要
2/29	找出程式和公式的關係>.<
3/4	做封面
3/7	研究心得
3/11	圖表目錄
3/14	簡報
3/21	簡報
3/25	簡報